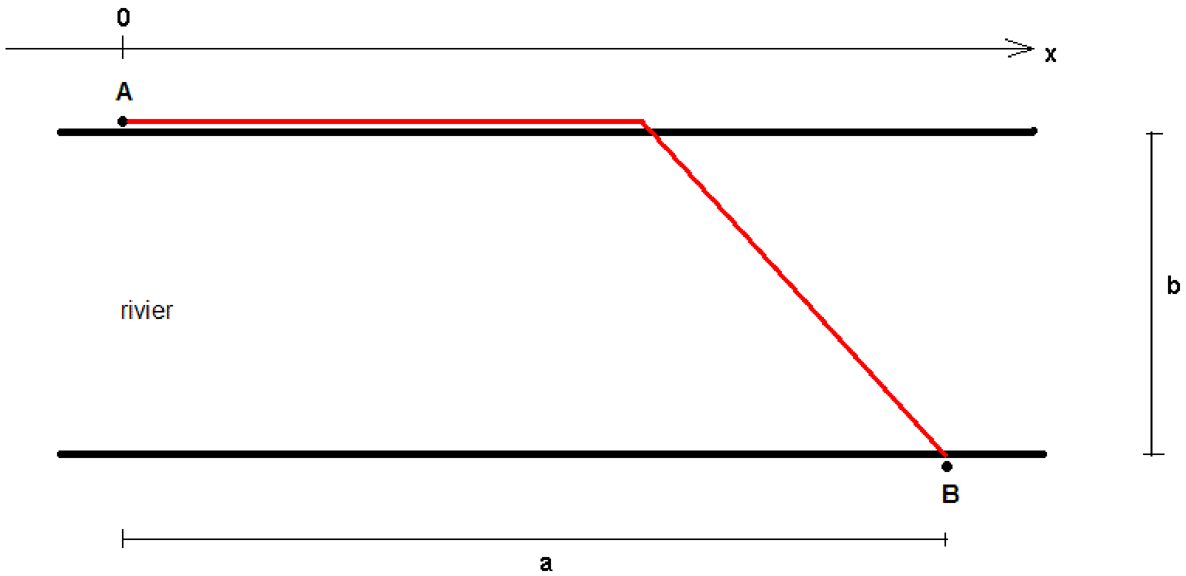
Extremumvraagstuk

Probleem: Kasper staat op punt A aan de oever van een rivier met breedte b, en wil zo vlug mogelijk naar Karolien die op een afstand a verderop aan de overkant staat.
Hij kan zwemmen met snelheid v_z en lopen met snelheid v_l. Laat ons voor het gemak even de stroming verwaarlozen.



De te minimaliseren grootheid is hier dus de benodigde tijd t.
De te variëren grootheid is hier de positie x waar hij in het water springt.
Als we t in funktie van x uitdrukken, dan zou dt/dx=0 ons dus de gewenste optimale x moeten leveren.

Aangezien tijd=afgelegde weg/snelheid, en gebruik makend van Pythagoras, vinden we:

$$t = \frac{|x|}{v_l} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{v_z}$$

Let op: de absolute waarde is belangrijk. Die lijkt daar misschien wat raar te staan in deze formule, maar als we bedenken dat $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2}$, met "0" de afstand van A tot de oever, wordt de vergelijking al meer "symmetrisch".

Iets met absolute waarden afleiden, is vervelend, maar aangezien we mogen veronderstellen dat x>0, tenminste als Kasper rapper loopt dan hij zwemt, mogen we de streepjes even weglaten voor de berekening.

We krijgen dan:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_l} - \frac{a-x}{v_z\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

Het nulstellen van deze afgeleide levert ons:

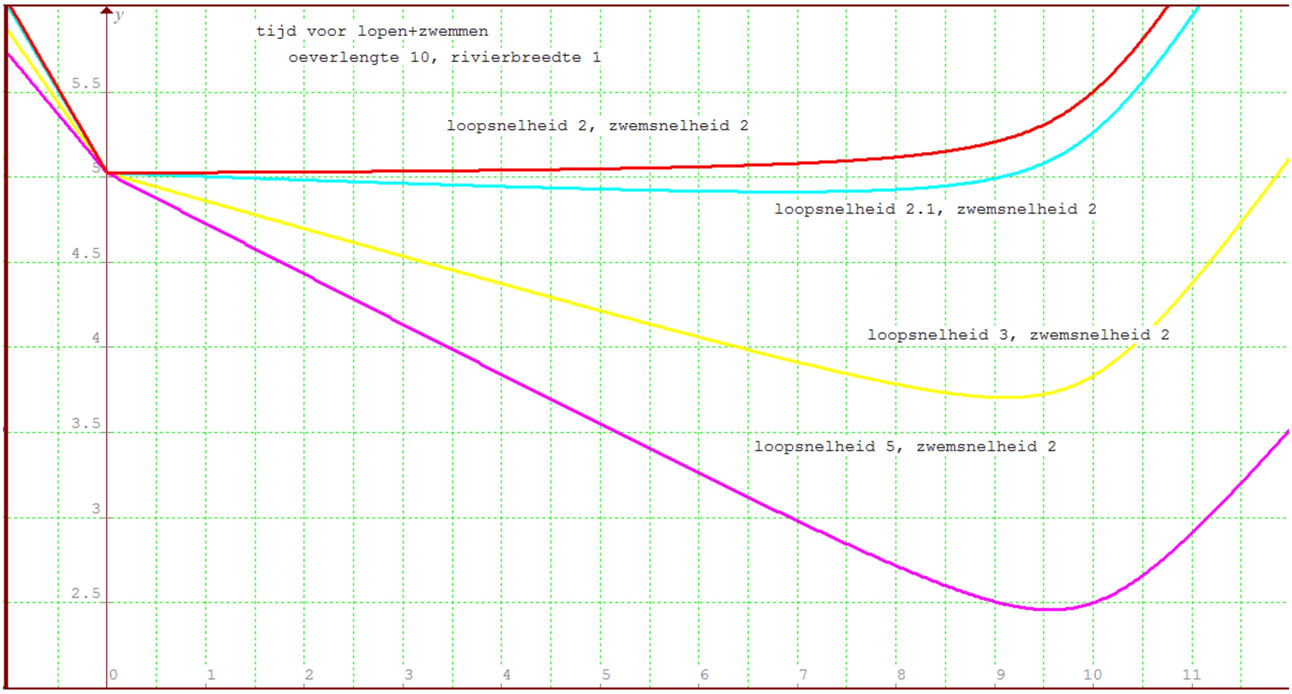
$$v_l(a-x) = v_z\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

en na kwadrateren en een beetje omvormen:

$$x = a - \frac{v_z}{\sqrt{v_l^2 - v_z^2}}b$$

Vullen we hier bv. de waarden a=10km, b=1km, v_l=5km/h en v_z=2km/h in, dan krijgen we x≈9.56km, wat intuïtief aanvaarbaar lijkt.
Er is echter iets raars aan de hand met de gevonden formule als de 2 snelheden gelijk zouden zijn! We zouden verwachten dat we dan x=0 zouden krijgen, immers als we even rap zwemmen als lopen, kunnen we gewoon recht op recht zwemmen. Echter, onze x schiet plots naar -∞! Wat is hier aan de hand?

Een blik op de grafiek van t versus x, voor verschillende loopsnelheden, verduidelijkt de zaak:



Als beide snelheden genoeg verschillen, is er een duidelijk minimum. Als ze bijna gelijk zijn, wordt dit zeer flauw. Zo gauw ze gelijk worden, schiet het plots naar uiterst links, maar... de absolute waarde-streepjes in de formule blijken hier van doorslaggevend belang, zodanig dat x=0 inderdaad een minimum geeft!

Opmerking: Dit vraagstuk lijkt zeer sterk op de afleiding van de optische brekingswet van Snellius, uit het principe van Fermat (licht volgt niet de kortste, maar de rapste weg, en de lichtsnelheid hangt af van de middenstof).

Meer...
Google: Extremumvraagstukken, extremumproblemen, Snellius+Fermat, maximum-minimum problems

Koen Van de moortel
www.astrovdm.com/schoolinfo.htm
20071015