Vierkantsvergelijkingen

1. Inleidend voorbeeld

Laat ons eens het volgende raadsel bekijken:
Een rechthoek heeft een omtrek van 20m en een oppervlakte van 21m². Hoe groot zijn dan de zijden?

Naar goede gewoonte bij het oplossen van problemen **benoemen we wat we niet kennen** en **schrijven we alles op wat we weten**.

Laat ons hier bv. de lengte x noemen, dan is de breedte de helft van de omtrek min de lengte, dus 10-x.
De oppervlakte is de lengte maal de breedte, dus:

$$x \cdot (10 - x) = 21$$

Nu kunnen we de haakjes uitwerken

$$10x - x^2 = 21$$

en alles in hetzelfde lid zetten, om te komen tot deze vergelijking:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \qquad (1)$$

En nu? We zitten nu met wat we noemen een "kwadratische vergelijking" (of "vierkantsvergelijking" of "tweedegraadsvergelijking"), d.w.z. de onbekende x komt erin voor in het kwadraat. De algemene vorm ervan is: $ax^2+bx+c=0$ (hier a=1, b=-10, c=21).

Het is niet zo vanzelfsprekend om hieruit x af te zonderen.
We zullen dus even hokus pokus moeten doen... let goed op, we gaan gewoon deze vergelijking een beetje omvormen en herschikken:

$$x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 4 = 0$$

Dit is nog altijd hetzelfde, maar nu herkennen we hier het merkwaardig produkt $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, zodat we kunnen schrijven:

$$(x - 5)^2 - 4 = 0$$

of:

$$(x - 5)^2 = 4 \qquad (2)$$

en dat ziet er al heel wat oplosbaarder uit: als het kwadraat van iets 4 is, is dat iets dus één van de vierkantswortels van 4:

$$x - 5 = \pm 2$$

Er zijn dus 2 mogelijkheden:

$$x - 5 = 2 \Leftrightarrow x = 5 + 2 = 7$$

of:

$$x - 5 = -2 \Leftrightarrow x = 5 - 2 = 3$$

De lengte (x) kan dus 7 zijn, dan is de breedte 10-7=3. Met de andere mogelijkheid (x=3) krijgen we als breedte 10-3=7. Eigenlijk is er dus slechts één oplossing voor ons raadsel: de rechthoek meet 3 op 7m, en dat geeft inderdaad een oppervlakte van 21m² en een omtrek van 20m.

Samengevat:

- *We hadden een vraagstuk waarbij we gestuit zijn op een tweedegraadsvergelijking.*
- *Door een beetje manipulatie hebben we deze omgevormd naar een gemakkelijker op te lossen vorm.*
- *Er waren 2 oplossingen voor de vergelijking die voor het oorspronkelijke vraagstuk eigenlijk op hetzelfde neerkwamen.*

Als je de volledige gedachtengang goed begrepen hebt, mag je doorgaan naar het volgende, anders herlees je het voorbeeld best nog eens.

2. Algemene methode

Het vorige was maar een voorbeeld van een mogelijke situatie waarin we een kwadratische (of tweedegraads-) vergelijking kunnen tegenkomen. Het ware interessant een methode te bedenken waarmee we in het vervolg een dergelijke vergelijking zouden kunnen oplossen zonder dat er nog hokus pokus aan te pas moet komen, d.w.z. gewoon een formule die de oplossing geeft, nietwaar?
We zullen daartoe de redenering van het voorbeeld herdoen, maar nu met letters die willekeurige getallen voorstellen.

Het voorbeeld (1) hebben we kunnen oplossen door een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{met } a,b,c \in \mathbb{R} \tag{3}$$

om te vormen naar een van de vorm

$$(x - q)^2 = r \quad \text{met } q,r \in \mathbb{R} \tag{4}$$

(Zie vgl. 2 van het voorbeeld.)
Immers, de oplossing voor de tweede vorm is gemakkelijk te berekenen:

$$x = q \pm \sqrt{r} \tag{5}$$

(waarbij men ± moet lezen als: er is een oplossing waarbij hier + staat en een andere waarbij er - staat. Een positief getal heeft immers 2 vierkantswortels.)

Als we dus vorm (3) naar vorm (4) kunnen omzetten, zijn we gered. Laat ons eens proberen:

Om te beginnen kunnen we (3) ook schrijven als:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (7)$$

(We delen gewoon alles in het linker- en rechterlid door a, zodat er geen getal meer voor de x² staat, zoals in (4) waar we naartoe willen.)

In ons voorbeeld hadden we de middelste term bekeken als de dubbelprodukt-term van een kwadraat van een som. We zullen dus hier hetzelfde doen:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

En nu hebben we inderdaad zoiets als vorm (4): in het linkerlid een kwadraat waarin x voorkomt, en in het rechterlid geen x.

Let op: we kunnen deze berekeningen maar doen als $a \neq 0$, maar dat mogen we gerust veronderstellen, want als a=0, dan hebben we geen kwadratische vergelijking meer, en dan is het probleem gelijk hoe opgelost.

Trekken we nu de vierkantswortels van het linker- en het rechterlid, dan krijgen we:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

of vereenvoudigd:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (10)$$

Opgelet: we kunnen deze berekening alleen maken als hetgeen onder de wortel staat positief is, dwz. de vergelijking heeft slechts oplossingen als

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Men noemt dit getal de "**diskriminant**" van de vergelijking, dikwijls genoteerd met de letter D.
In het bijzondere geval dat D=0, blijft er één mogelijke waarde voor x, nl. -b/2a.

Samengevat:
De oplossing voor een vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c=0$ wordt gegeven door:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad met \quad D = b^2 - 4ac$$

$D>0 \Rightarrow$ 2 verschillende oplossingen
$D=0 \Rightarrow$ 1 oplossing
$D<0 \Rightarrow$ geen oplossingen

Dit is een uitermate belangrijke formule die je nog gans je wiskundige loopbaan dikwijls zult nodig hebben, dus: boven je bed hangen tot je ze zo uit je mouw kunt schudden!

Herbekijken we nu ons voorbeeld (vgl.1) waar a=1, b=-10 en c=21, dan zien we dat we x nu rechtstreeks kunnen vinden door gewoon a, b en c in formule (10) in te vullen, zonder verder nog te moeten nadenken:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = 5 \pm 2 \quad \Rightarrow x = 3 \vee x = 7$$

3. Oefeningen

1. Bereken de oplossing(en) (indien mogelijk) voor de volgende vergelijkingen:

a) $3x^2+3x-6=0$
b) $4x^2+x+8=0$
c) $x^2+6x+9=0$
d) $x^2+x-1=0$
e) $7x^2-4=0$
f) $-2x^2=0$

2. Voor welke waarde van c heeft de vergelijking $3x^2+x+c=0$ juist één oplossing?